

ÉTUDE AÉROTHERMODYNAMIQUE DE L'ABLATION

Par TH. MOULIN et J. J. BERNARD

Office National d'Études et Recherches Aéronautiques (France)

Sommaire—L'étude aérothermodynamique des parois fongibles fait appel aux équations les plus générales de la couche limite ou figurent en plus des gradients de température, les variations éventuelles du débit de l'écoulement. Selon qu'il y a prélèvement ou injection dans la couche limite, on montre d'abord que la solution du système simplifié de la couche limite laminaire a un comportement asymptotique algébrique ou exponentiel aux grandes valeurs des nombres de Prandtl et de Schmidt.

Ces solutions asymptotiques sont encore utilisables pour des valeurs relativement modérées de ces paramètres et se raccordent à des solutions connues qui sont brièvement rappelées ainsi que les hypothèses restrictives correspondantes; on indique ensuite quelques tentatives conduisant sans programme de calculs mécanographiques important à des solutions d'une précision et d'une généralité suffisantes.

Dans le matériau fongible lui-même, les phénomènes thermiques font intervenir les caractéristiques de conduction et d'ablation de la matière; les solutions de l'équation de la chaleur, obtenues par plusieurs modes de calcul sont discutées.

Quelques observations expérimentales effectuées en soufflerie à température modérée sur des matériaux de simulation sont enfin comparées aux prévisions théoriques.

1. INTRODUCTION

L'ABLATION, au sens de l'aérothermodynamique, est l'enlèvement progressif d'un revêtement, par fusion, vaporisation ou arrachement, grâce auquel l'échauffement d'un engin peut être limité pendant la durée de la mission qui lui est fixée.

L'étude de ce phénomène présente deux aspects très différents liés respectivement au mécanisme aérothermodynamique et au comportement du revêtement fongible; ces deux aspects sont en fait difficilement séparables car l'interaction entre l'écoulement dans la couche limite et les évolutions du matériau (fusion, sublimation, pyrolyse) fait de l'ablation un phénomène complexe et très probablement fluctuant: c'est dans ce caractère instationnaire du processus, dont M. Maurice Roy a suggéré l'importance, qu'a été recherchée l'explication de singularités observées dans les expériences rapportées plus loin et il semble maintenant établi que cet élément ne pourra plus être négligé dans les développements futurs

de la théorie de l'ablation. L'analyse théorique présentée ici est encore limitée cependant aux équations stationnaires de la couche limite et à l'étude purement thermique de l'échauffement du revêtement pendant son ablation, la liaison entre ces deux problèmes étant établie par le bilan entre la chaleur dissipée dans la couche limite et le flux reçu par le revêtement ainsi que par la condition d'équilibre entre les différentes phases en présence.

2. RELATIONS FONDAMENTALES

Dans les équations classiques, bidimensionnelles (en plan ou de révolution) de la couche limite, rappelées ci-après, les variables ξ, η sont déduites des coordonnées géométriques (x, y) respectivement tangente et normale

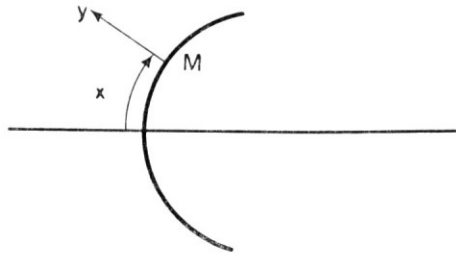


FIG. 1.

à l'obstacle (Fig. 1) par la transformation classiquement utilisée⁽¹⁾ pour la recherche de solutions de similitude:

$$\xi = \int_0^x \rho_k \mu_k u_e r^{2j} dx; \quad \eta = \frac{u_e r^j}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy \quad \begin{cases} j = 0: & \text{cas} \\ & \text{plan} \\ j = 1: & \text{cas} \\ & \text{de révolution} \end{cases}$$

dans laquelle toutefois, l'état de référence, éventuellement variable avec x et désigné par l'indice k ne sera pas nécessairement dans ce qui suit pris à la paroi (indice p) ou à la frontière de la couche limite (indice e) mais en un point intérieur à la couche limite qui sera précisé.

Dans ces conditions, les deux fonctions inconnues principales $f(\xi, \eta)$ et $g(\xi, \eta)$ liées respectivement à la vitesse ($f'_\eta = u/u_e$) et à l'enthalpie ($g = \frac{h+u^2/2}{h_e+u_e^2/2}$) ainsi que les concentrations c_i de chaque constituant des gaz de la couche limite sont déterminées par le système:

$$\left(\frac{\rho u}{\rho_k \mu_k} f_{\eta\eta} \right)_\eta + f f_{\eta\eta} + 2\beta \left[\frac{\rho_e}{\rho} - f_\eta^2 \right] = 2\xi (f_\eta f_{\eta\xi} - f_\xi f_{\eta\eta})$$

$$\left(\frac{1}{Pr} \frac{\rho\mu}{\rho_k\mu_k} g_\eta\right)_\eta + fg_\eta + \frac{u_e^2}{h_0} \left[\frac{Pr-1}{Pr} \frac{\rho\mu}{\rho_k\mu_k} f_\eta f_{\eta\eta} \right]_\eta + \left[\frac{1}{Pr} \frac{\rho\mu}{\rho_k\mu_k} \sum \frac{h_i}{h_0} Le_i - 1 \right] c_{i\eta} = 2\xi(f_\eta g_\xi - f_\xi g_\eta),$$

$$\left(\frac{1}{Sc} \frac{\rho\mu}{\rho_k\mu_k} c_{i\eta}\right)_\eta + f c_{i\eta} + \frac{2\xi w_i}{\rho u_e (d\xi/dx)} = 2\xi(f_\eta c_{i\xi} - f_\xi c_{i\eta}) \quad (1)$$

obtenu sous cette forme par Fay et Riddell⁽²⁾ à partir des équations de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la conservation de chaque espèce, et dont les symboles sont définis dans la liste donnée en annexe seules la diffusion thermique et les chaleurs de réactions chimiques y ont été négligées.

Aux conditions aux limites usuelles de l'écoulement sans ablation:

$$f_\eta(\xi, 0) = 0; \quad f_\eta(\xi, \infty) = 1; \quad g(\xi, 0) = g_p; \quad g(\xi, \infty) = 1, \quad (2)$$

s'ajoutent les conditions liées au débit \dot{m} des gaz E émis par la paroi fongible:

$$f(\xi, 0) = -\frac{1}{\sqrt{2\xi}} \int_0^{x(\xi)} \dot{m}^j dx; \quad [Q_E(v+v_E)]_{\eta=0} = \dot{m} \quad (3)$$

la vitesse de diffusion v_E étant définie par $v_E = -\frac{D}{c_E} \frac{\partial c_E}{\partial y}$; la conservation dans le courant principal de constituants autres que E se traduit évidemment par la relation $[Q_i(v+v_i)]_{\eta=0} = 0$.

La condition imposée à $f(\xi, 0)$ limite les possibilités d'existence de solutions vérifiant l'hypothèse de similitude c'est-à-dire indépendantes de ξ , ce qui suppose des conditions aux limites également indépendantes de ξ ; dans le cas d'un obstacle de révolution émoussé, au voisinage du point d'arrêt, l'expression (3) de $f(0, 0)$ se calcule aisément quand on suppose \dot{m} constant dans ce domaine limite: $f(0, 0)$ prend la valeur constante.:

$$f_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\dot{m}}{\sqrt{\rho_k\mu_k \frac{du_e}{dx}}}$$

qui vérifie la condition de similitude; au contraire, dans le cas d'une plaque plane, la valeur de $f(\xi, 0)$ ne vérifie rigoureusement cette condition que si le débit \dot{m} varie comme $1/\sqrt{x}$.

L'objet de ce calcul de couche limite est finalement, d'écrire la condition aux limites du problème thermique dans la paroi elle-même; cette con-

dition qui s'écrit, en désignant par Y , la distance à la surface en ablation, et en ne prenant pas en compte le rayonnement:

$$q_M = \left(-\lambda \frac{\partial T_M}{\partial Y} \right)_{\text{matériau}} = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{\text{gaz}} - \dot{m} [h_{E \text{ gaz}} - h_{E \text{ solide}}] \quad (4)$$

fait intervenir la différence d'enthalpie h_E du matériau sous phase gazeuse et sous phase solide.

Il faut noter que jusqu'à ce stade du problème, le régime a été supposé permanent; en fait, la valeur g_p est toujours fonction du temps car un régime stationnaire de conduction thermique dans le matériau est inconcevable au début de l'ablation.

D'une manière générale, la condition d'équilibre entre la pression partielle p_E du gaz émis et la température de paroi T_p peut s'exprimer par une relation exponentielle qui dans le cas d'un corps pur fait intervenir simplement la chaleur de vaporisation L_v remplacée dans le cas d'un corps qui se pyrolyse par l'énergie Q de décomposition:

$$p_E = \begin{cases} B \exp\left(-\frac{L_v}{RT_p}\right) \\ B \exp\left(-\frac{Q}{RT_p}\right) \end{cases} \quad (5)$$

Enfin, la conduction de la chaleur dans le revêtement, de diffusivité χ et d'épaisseur initiale e , est définie par l'équation classique et unidimen-

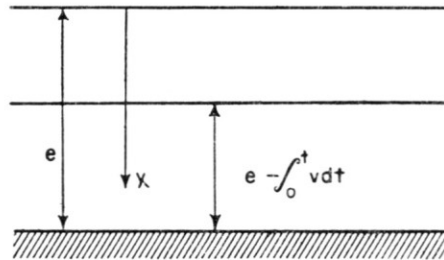


FIG. 2.

sionnelle de la chaleur qu'il y a généralement intérêt à rapporter à des axes en translation avec la vitesse $v(t)$ de régression de la paroi soumise à l'ablation, ce qui lui donne la forme:

$$\frac{\partial^2 T_M}{\partial Y^2} + \frac{V}{\chi} \frac{\partial T_M}{\partial Y} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial T_M}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

Pour $t = 0$, les conditions aux limites sont évidemment:

$$T_M(Y) = T_{M0}; \quad v = 0$$

les équations de la couche limite et les conditions (4) et (5) déterminent d'autre part sur la face soumise à l'ablation, c'est-à-dire pour $Y = 0$, T_M en fonction de V et t ainsi que V en fonction de $\partial T_M / \partial Y$ et t ; enfin, l'autre face du revêtement, correspondant à $Y = e - \int_0^t v dt$ (Fig. 2), sera supposée en contact avec un puits de chaleur d'épaisseur e' , de capacité thermique $c'q'e'$ par unité de surface et de conductibilité infinie ce qui se traduit par la condition:

$$(vq'e'e' - \lambda) \frac{\partial T_M}{\partial Y} = e'c'q' \frac{\partial T_w^-}{\partial t} \quad (7)$$

la température uniforme T_w^- du puits étant en fait, celle du matériau fongible aux points de contact.

3. PROBLÈME DE LA COUCHE LIMITE

Le cas dégénéré, étudié par Mickley et Ross⁽³⁾ dans le cas d'une plaque plane est caractérisé par les hypothèses suivantes:

- ablation sans réactions chimiques,
- injection d'un gaz à propriétés physiques identiques à celles du fluide extérieur à la couche limite,
- propriétés physiques du mélange uniforme dans toute la couche limite,

qui réduisent le système à la forme très simple:

$$\left. \begin{aligned} f''' + ff'' + \beta(1-f'^2) &= 0 \\ \zeta'' + Zf\zeta' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

La fonction ζ désignant respectivement les expressions: $(g-g_p)(1-g_p)$ et $(c_i - c_{ip}) / (c_{ie} - c_{ip})$ selon que Z représente le nombre de Prandtl ou le nombre de Schmidt.

On remarque aisément que la réduction au système (8) peut être obtenue également, au voisinage du point d'arrêt, pour un mélange binaire de deux gaz différents, dont le nombre de Lewis reste voisin de 1, si les propriétés physiques du mélange et sa concentration sont fixées dans toute la couche limite aux valeurs correspondant à l'état pris comme référence dans la transformation de similitude.

Le choix de l'état optimal de référence n'est pas immédiat: dans le cas d'une couche limite sans ablation, Monaghan⁽⁷⁾ a utilisé l'enthalpie de référence définie par Eckert comme une moyenne des enthalpies, pondérée par rapport aux vitesses; sauf dans le cas d'une plaque plane, il est difficile d'étendre cette définition à une concentration intermédiaire, aussi,

les valeurs de référence adoptées ici en première approximation⁽⁸⁾ sont simplement les moyennes:

$$c_E^* = \frac{c_{Ep} + c_{Ee}}{2} = \frac{c_{Ep}}{2}; \quad h^* = \frac{h_p + h_e}{2}$$

Dans ces conditions, un calcul simple permet de déduire des conditions aux limites (3) l'expression suivante de la concentration à la paroi:

$$c_{Ep} = \frac{|f_0| Sc^*}{\zeta'_p + |f_0| Sc^*}$$

en fonction du nombre de Schmidt Sc^* calculé pour l'état de référence. Le problème revient donc essentiellement à déterminer la valeur pour $\eta = 0$ des dérivées ζ' en fonction de f_0 et des nombres de Prandtl et de Schmidt qui constituent ainsi les trois paramètres fondamentaux de la solution: en effet, le gradient de température normal à la paroi:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{C_p} \left[\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \sum c_i h_i \right]$$

est défini ici par l'expression:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{C_p} \frac{d\eta}{dy} \{ \zeta'(Pr^*, f_0) [h_e - (h_E c_E + h_1(1 - c_E))]_p + \zeta'(Sc^*, f_0) (h_e - h_1)_p \}$$

qui se simplifie dans le cas où les nombres de Prandtl et de Schmidt sont identiques (cas limite de l'hypothèse $Le \approx 1$) et devient:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\sqrt{2}}{Pr^*} \zeta'(Pr^*, f_0^*) \sqrt{\frac{du_e}{dx}} \sqrt{\varrho^* \mu^*} [h_{1e} - h_{1p}] \quad (10)$$

La différence d'enthalpie qui intervient dans cette dernière formule serait la même en l'absence d'ablation; dans ces conditions, un développement de ζ'_p et $\varrho^* \mu^*$ en fonction de f_0 fera apparaître comme premier terme le flux de convection \bar{q}_p reçu par le matériau, *s'il n'y avait pas ablation*, à la même température T_p .

D'autres solutions, généralement numériques ont été obtenues avec des hypothèses simplificatrices un peu moins restrictives que ces dernières, et des formules explicites telles que:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \left[\bar{q}_M - A \left(\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_E} \right)^\alpha (h_{1e} - h_{1p}) \dot{m} \right], \quad \left(\begin{array}{l} 0,67 \leq A \leq 0,72 \\ 0,24 \leq \alpha < 0,4 \end{array} \right) \quad (9)$$

en ont été déduites par interpolation^(4, 5, 6.)

3.1. Solutions asymptotiques

Schlichting a montré⁽⁹⁾ que pour Z constant, ζ'_p qui tend vers 0 quand f_0 tend vers $-\infty$, se comporte comme Zf_0 quand f_0 tend vers $+\infty$, ces

deux cas correspondant respectivement à l'émission et à l'aspiration de gaz dans la couche limite.

Un comportement asymptotique analogue a été recherché pour f_0 constant, quand Z tend vers l'infini. Quelques indications sont données en annexe I sur la détermination de ces solutions qui sont très différentes selon le signe de f_0 :

—pour $f_0 > 0$ (aspiration): $\zeta'_p \simeq f_0 Z$,

—pour $f_0 = 0$, on retrouve, sans aspiration ni soufflage l'analogie de Reynolds sous la forme:

$$\zeta = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \left(\frac{f'_0}{6}\right)^{1/3} Z^{1/3}$$

—pour $f_0 < 0$ (soufflage), on obtient la fonction exponentielle de Z :

$$\zeta'_\eta = \sqrt{\frac{f'(\check{\eta})}{2\pi}} \sqrt{Z} \exp(Z\check{\phi})$$

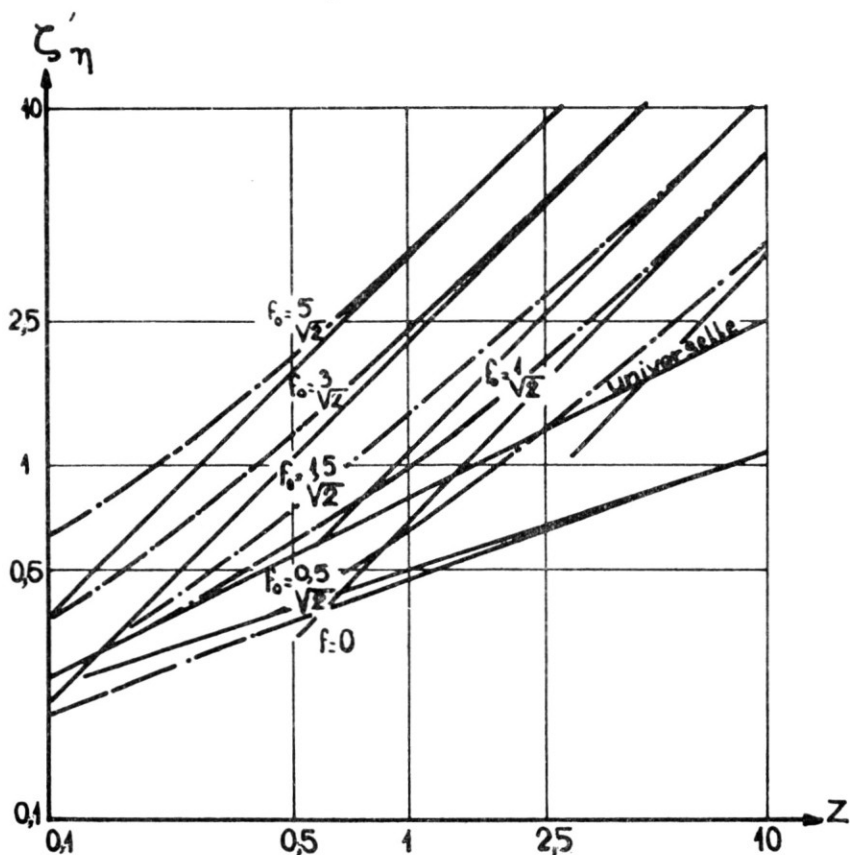


FIG. 3.

dans laquelle $\check{\eta}$ et $\check{\phi}$ correspondent au minimum de la fonction :

$$\phi(\eta) = \int_0^{\eta} f d\eta$$

Ces fonctions, complétées par l'expression $\sqrt{2Z/\pi}$ de ζ au voisinage de $Z = 0$, permettent de tracer les courbes des Figs. 3 et 4 correspondant respectivement au cas de l'aspiration et au cas du soufflage; on remarque, spécialement sur cette dernière, que les valeurs calculées au moyen de l'expression asymptotique restent voisines des valeurs exactes pour des nombres Z très modérés, qui peuvent même être de l'ordre de 1 lorsque $(-f_0)$ est grand, ce qui correspond à une émission importante de gaz.

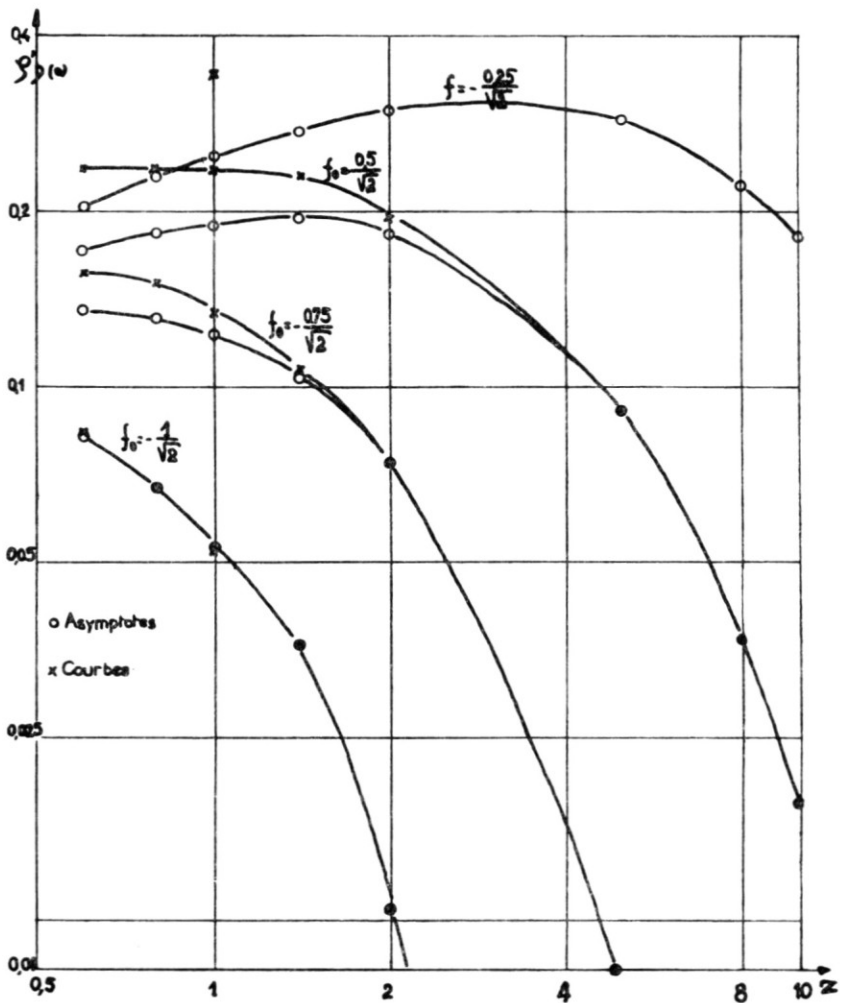


FIG. 4.

3.2. Résolution par des conditions intégrales

La solution asymptotique précédente constitue donc, au moins pour des valeurs suffisantes de Z , une première approximation du calcul des flux thermiques; la recherche d'une solution analytique explicite de l'équation en f , $\mathcal{C}(f) = 0$, a été tentée d'autre part au moyen d'une famille de fonctions à deux paramètres λ_1 et λ_2 :

$$f'(\lambda_1, \lambda_2, \eta) = 1 + (3\lambda_1 - 6)\psi^2 + (8 - 5\lambda_1)\psi^3 + (2\lambda_1 - 3)\psi^4, \\ (\psi = \exp -\lambda_2 \eta)$$

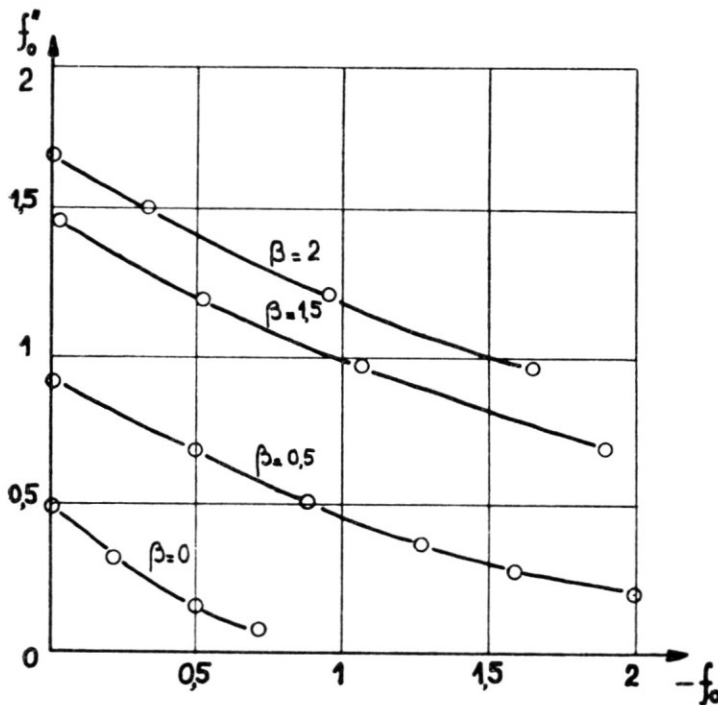


FIG. 5.

satisfaisant aux conditions aux limites (2) et dont les paramètres λ_1 et λ_2 sont déterminés, selon une généralisation de la méthode de Polhausen, par les deux premières conditions intégrales :

$$\int_0^1 \mathcal{C}(f) d\psi = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \mathcal{C}(f) \psi d\psi = 0$$

qui donnent λ_1 et λ_2 en fonction de β et f_0 par des calculs élémentaires. Les variations de la dérivée f'_0 , qui se réduit au produit $\lambda_1 \lambda_2$, en fonction de β et f_0 représentées sur la Fig. 5 coïncident pratiquement avec les solutions numériques exactes de (7). Une justification du principe général

de la méthode est proposée dans l'annexe II; son application à la résolution de systèmes d'équations aux dérivées partielles telles que (1), qui ne présente pas de difficultés théoriques spéciales, est actuellement en développement sans un recours important aux calculateurs automatiques, le programme étant incomparablement moins lourd que celui d'une résolution par balayage ou approximations successives dont on sait que la convergence est généralement laborieuse; par contre, la vérification par approximations successives de ces solutions est assez rapide et a donné des corrections qui ne dépassent pas 3%.

3.3. Comparaison des résultats

Quelle que soit la méthode appliquée, le calcul des flux de convection en présence d'ablation suppose connues les variations de toutes les grandeurs physiques et en particulier de la viscosité, du nombre de Schmidt et du nombre de Reynolds en fonction de la température et de la concentration.

La température intermédiaire étant supposée connue, la concentration intermédiaire se trouve donc définie par l'équation implicite:

$$c_{Ep} = \frac{|f_0| Sc^*}{\zeta'_p + |f_0| Sc^*}$$

pour étudier le cas limite où le gaz émis par le matériau fongible est très léger par rapport à l'air, les concentrations intermédiaires données par le tableau ci-dessous en fonction de f_0 ont été calculées pour l'hélium à une température de l'ordre de 300°K:

f_0	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6
C_{Ep}	0,09	0,20	0,44	0,55	0,65
Sch*	0,30	0,38	0,54	0,65	0,72

Les flux calculés dans ces conditions par la formule:

$$q^* = \frac{\sqrt{2}}{\Phi_{Pr^*}} \zeta'_p(f_0^*, Pr^*) \sqrt{\varrho^* \mu^*} (h_{1e} - h_{1p})$$

ont été comparés à ceux qui sont donnés par l'expression de Gross et Gazley⁽¹⁰⁾ correspondant à l'émission d'air:

$$q = \frac{\sqrt{2}}{(\Phi_r)_e} \zeta'_p(\tilde{f}_0, \Phi_r)_e \sqrt{\varrho_e \mu_e} (h_{1e} - h_{1p})$$

dans laquelle le terme de débit \tilde{f}_0 est déduit de f_0 par la correction:

$$\tilde{f}_0 = f_0 \sqrt{\frac{\varrho^* \mu^*}{\varrho_e \mu_e} \left(\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_e} \right)^{1/3}}$$

qui fait intervenir le rapport des masses moléculaires de l'air et de l'hélium.

Les deux résultats sont identiques dans le cas $f_0 = -0,4$ qui correspond à la concentration intermédiaire $c^* = 0,22$ pour laquelle en effet, le nombre de Lewis est voisin de 1. Lorsque le nombre de Lewis est très différent de 1, il est nécessaire de retenir dans l'équation de l'énergie le terme correspondant, ce qui n'alourdit pas considérablement les calculs mais ne permet plus de résoudre seulement une équation unique en ζ .

4. PROBLÈMES THERMIQUES

Le problème thermique posé par l'équation (6) et les conditions aux limites correspondantes comportent pratiquement trois phases qu'il est avantageux d'étudier séparément.

Pendant la première phase, le matériau fongible est chauffé jusqu'à ce que la température de surface atteigne le point de pyrolyse: pratiquement cela se produit toujours avant que la seconde face du revêtement ait été touchée par l'échauffement et le problème est donc élémentaire.

Dans la seconde phase, qui peut ne pas exister, l'ablation est commencée mais l'échauffement n'a toujours pas atteint la seconde face du revêtement, et celui-ci se comporte donc comme un mur semi-infini. Il est possible dans ce cas, de résoudre explicitement l'équation (6) si V et T_p sont supposés constants (11); cette solution et la solution stationnaire:

$$T_M = T_{M0} + (T_p - T_{M0}) \exp \left\{ -\frac{V}{\chi} Y \right\} \quad (11)$$

définissent, à côté du temps caractéristique $\tilde{t} = \chi/V^2$, une épaisseur thermique $\tilde{Y} = \chi/V$ caractéristique du matériau de protection; pour une mission schématisée par une durée Δt , la quantité de chaleur:

$$q_c = C_M \rho_M \tilde{Y} (T_p - T_M)$$

est emmagasinée par le revêtement si son épaisseur reste grande par rapport à \tilde{Y} et le temps Δt grand par rapport à \tilde{t} .

La troisième phase, pendant laquelle la capacité thermique en contact avec le revêtement reçoit effectivement de la chaleur, peut être étudiée de plusieurs manières différentes.

On peut d'abord remarquer sur la condition (7) que pour:

$$e' = \frac{\lambda}{V \rho' c'}$$

ou:

$$e' \frac{\rho' c'}{\rho c} = \tilde{Y}$$

une solution stationnaire par rapport aux axes en translation est possible au delà de la deuxième phase, le puits de chaleur étant alors thermiquement équivalent au prolongement du revêtement jusqu'à l'infini.

Le problème peut être abordé par la méthode des conditions intégrales déjà décrite: une résolution de ce genre mais ne faisant intervenir qu'un seul paramètre a déjà été faite par Th. R. Goodman et J. J. Shea⁽¹²⁾ pour une température constante de la seconde face.

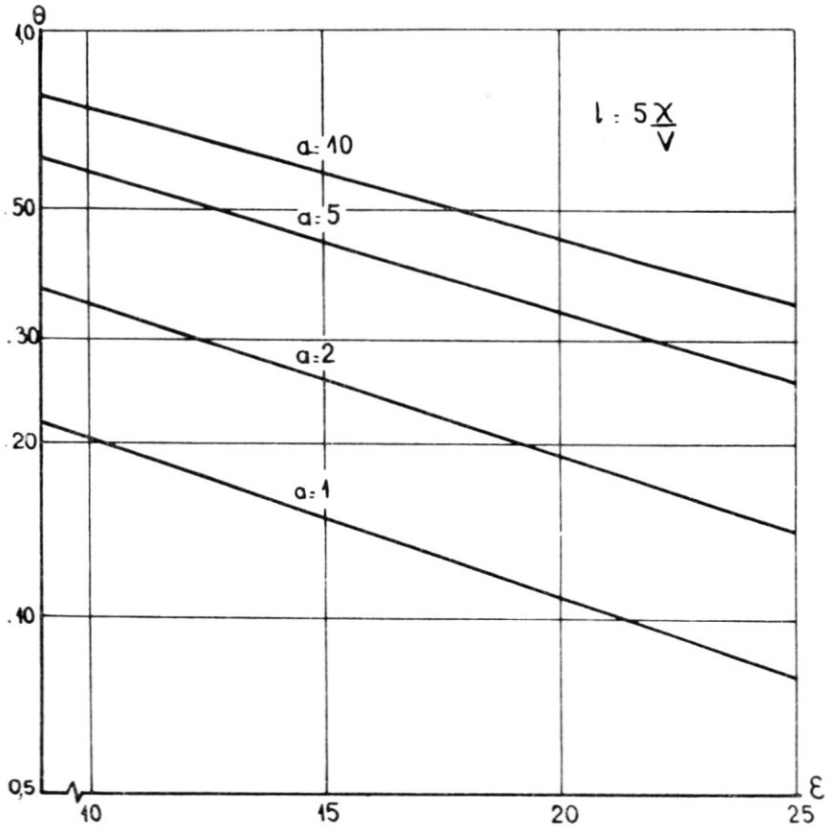


FIG. 6.

Des calculs ont été effectués à l'O.N.E.R.A. au moyen d'une machine analogique S.E.A. dans le cas simplifié d'une vitesse de régression constante V ; les solutions obtenues sont résumées par les courbes de la Fig. 6 qui représentent le rapport:

$$\Theta = \frac{T - T_{M0}}{T_p - T_{M0}}$$

en fonction du temps exprimé par la fraction ε de l'épaisseur initiale, subsistant à l'instant considéré, de manière à éliminer la vitesse V ; le paramètre a est le rapport $eC\varrho/e'C'\varrho'$ caractérisant les capacités thermiques du revêtement et du puits de chaleur. Cette solution n'est pas rigoureuse car la vitesse V ne peut rester constante, en particulier quand ε tend vers

0, domaine dans lequel θ n'est plus défini par la machine. Ces courbes sont assez exactement représentées par la relation:

$$\theta = k \exp \left\{ -\gamma(a) \frac{V}{\chi} e \right\} \tag{12}$$

ou:

$$\theta = k \exp \left\{ -\gamma(a) \frac{V^2}{\chi} (t_f - t) \right\}$$

dans laquelle t_f désigne l'instant où l'épaisseur du revêtement s'annule

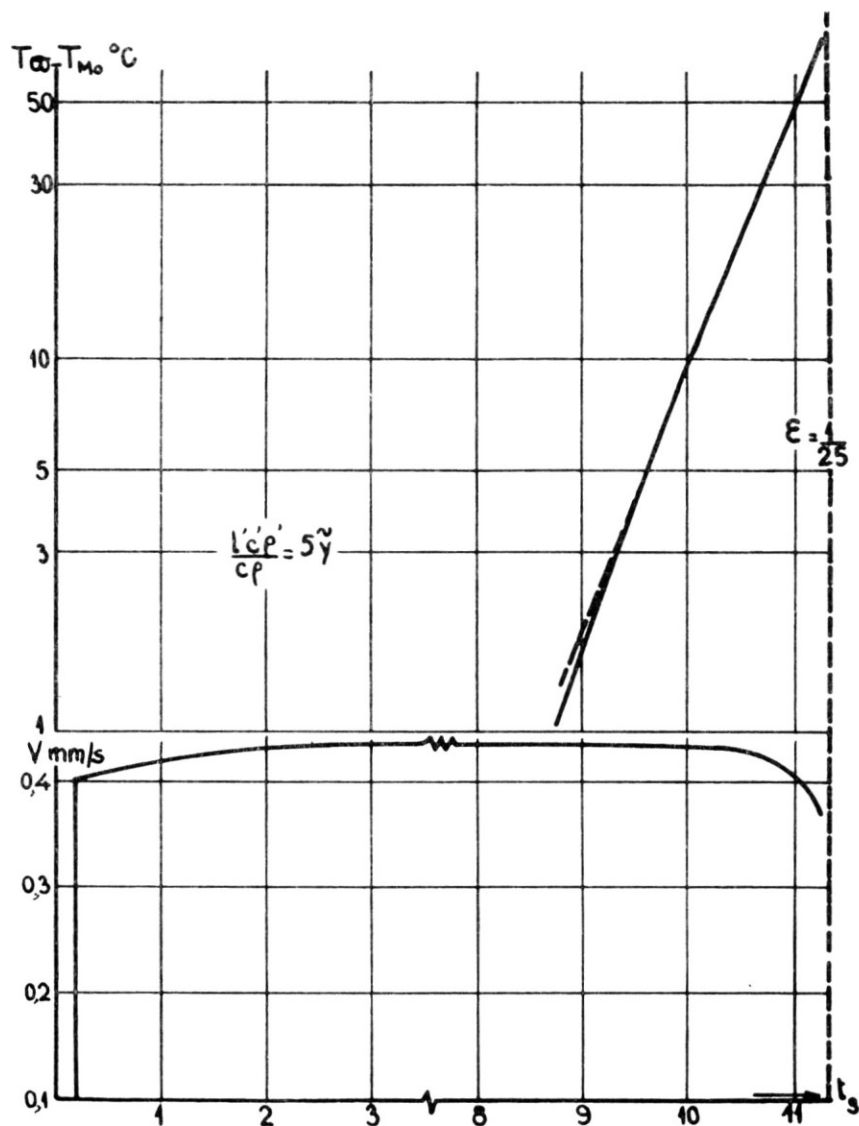


FIG. 7.

et $\gamma(a)$ est un terme correctif rigoureusement égal à 1 dans le cas où $a = e/\tilde{Y}$, ce qui est le cas déjà signalé de la solution stationnaire par rapport aux axes en translation et qui reste pratiquement assez voisin de 1. Des solutions plus rigoureuses et purement numériques des phases 2 et 3, ont également été calculées pour T_p constant, mais V variable, dans deux cas opposés correspondant à $e'(c'q'/c\rho) \cong \tilde{Y}$; les températures T_{ω}^- et les vitesses V obtenues sont représentées sur la Fig. 7.

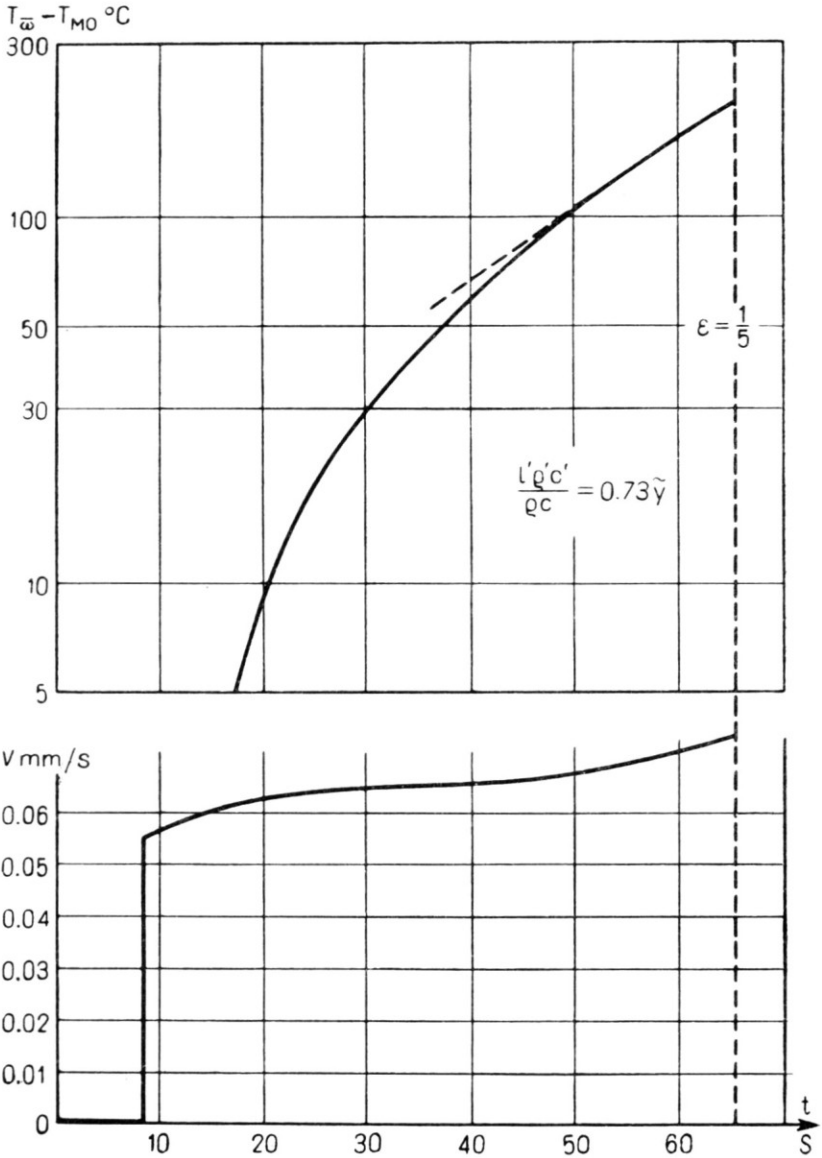


FIG. 7 bis.

5. RÉSULTATS EXPERIMENTAUX

Plusieurs séries d'expériences ont été effectuées sur des maquettes de plexiglass; elles avaient pour objet d'une part, l'examen de l'évolution du profil pendant l'ablation et la mesure de la vitesse de régression, d'autre part, la détermination du flux de chaleur reçu par la maquette au point d'arrêt.

Le dispositif expérimental est étroitement lié au schéma du puits de chaleur étudié précédemment; la maquette est un hémisphère-cylindre de diamètre 15 mm (Figure 8) dans lequel est logé une pastille d'argent de

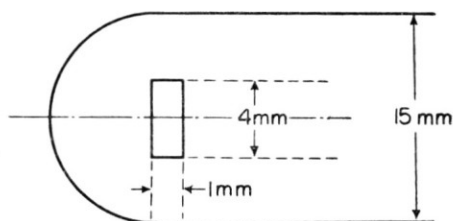


FIG. 8.

4 mm de diamètre et d'1 mm d'épaisseur figurant le puits de chaleur. La température de la pastille supposée uniforme, est mesurée par un thermocouple et un soin tout particulier est apporté pour que la constitution de l'ensemble soit aussi invariable que possible d'un modèle à l'autre.

5.1. Vitesses d'ablation

Les maquettes sont photographiées chaque seconde pendant l'essai, et les vitesses de régression sont mesurées directement sur les clichés. Des essais de ce genre ont été effectués dans des conditions variées de température d'arrêt T et de nombres de Mach:

- pour $T \leq 1.300^{\circ}\text{K}$: en soufflerie avec $M = 7$ et $2,7$,
- pour $T \leq 2.100^{\circ}\text{K}$: derrière statoréacteur,
- pour $T \simeq 4.000^{\circ}\text{K}$: dans le jet à faible vitesse d'un générateur de plasma, mais seules les premières mesures représentées sur la Fig. 9 sont d'une précision suffisante, les deux autres ne donnant pour le moment, que des ordres de grandeur.

5.2. Mesures thermiques

L'enregistrement des températures de pastilles pendant l'ablation présente l'aspect de la Fig. 10. Après une montée très lente de la température (a, b) la courbe présente un point anguleux suivi d'une montée beaucoup plus rapide (b, c) correspondant à l'échauffement de la pastille

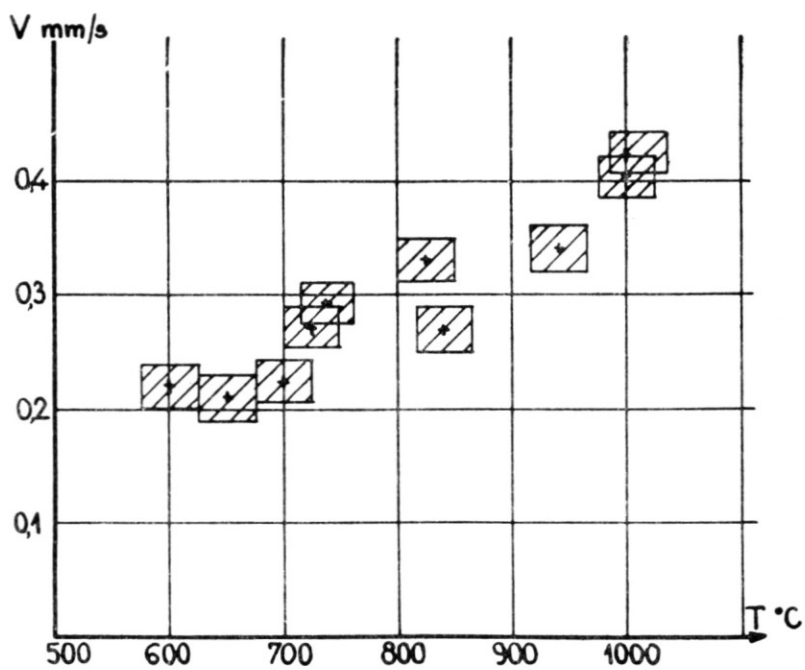


FIG. 9.

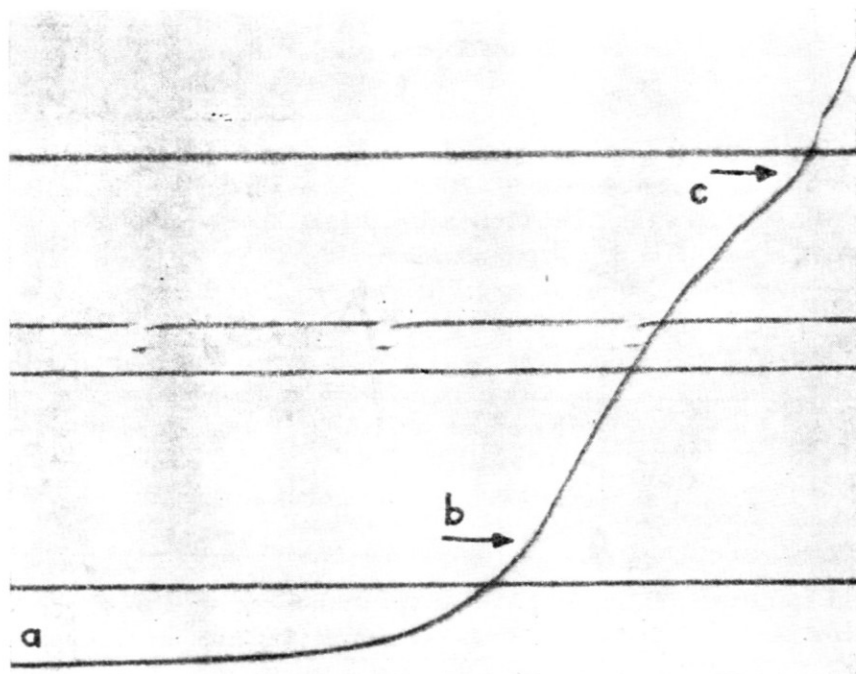


FIG. 10.

dénudée, qui se termine généralement par la mise hors service du thermocouple. Une portion seulement de la courbe ab , pour laquelle $ee > Y$ peut être exploitée avec sécurité et a été utilisée pour déterminer les deux éléments indispensables à toute interprétation: la température de paroi T_p et la diffusivité χ . La différence $T_w - T_{M0}$ entre les valeurs mesurées de la température de pastille et la température initiale est portée en dia-

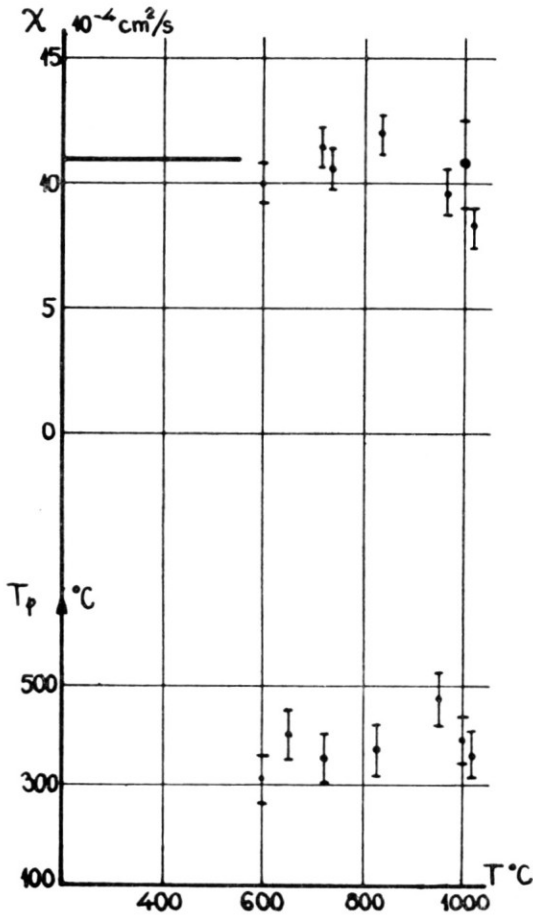


FIG. 11.

gramme semi-logarithmique en fonction du temps: la courbe comporte une partie rectiligne assez étendue représentable par la fonction:

$$T_w - T_{M0} = K \exp \{k(t - t_f)\}$$

dans laquelle l'instant t_f est celui où la pastille est découverte et les deux paramètres k et K , aisément mesurables graphiquement permettent de

définir les grandeurs cherchées par comparaison avec la solution (12): la diffusivité est immédiatement:

$$\chi = \frac{v^2 \gamma(a)}{k}$$

mais la température de paroi ne peut être déterminée qu'en supposant connue l'épaisseur de revêtement qui subsiste au moment où la vitesse d'ablation s'écarte sensiblement de sa valeur en régime permanent.

Les valeurs de χ et T_p ainsi obtenues sont présentées sur la Fig. 11.

D'autre part, la branche bc de l'enregistrement permet de déterminer le flux sans ablation \bar{q}_M à la température T_w de la pastille et d'en déduire le coefficient de convection correspondant.

Il est alors possible de calculer l'efficacité \mathcal{E} du matériau, classiquement définie comme le rapport du flux \bar{q}_M au débit \dot{m} des gaz injectés, qui, en première approximation, ne dépend que de la différence des enthalpies du fluide principal calculées à la température d'arrêt et à la température de paroi, comme on peut le vérifier aisément en régime stationnaire

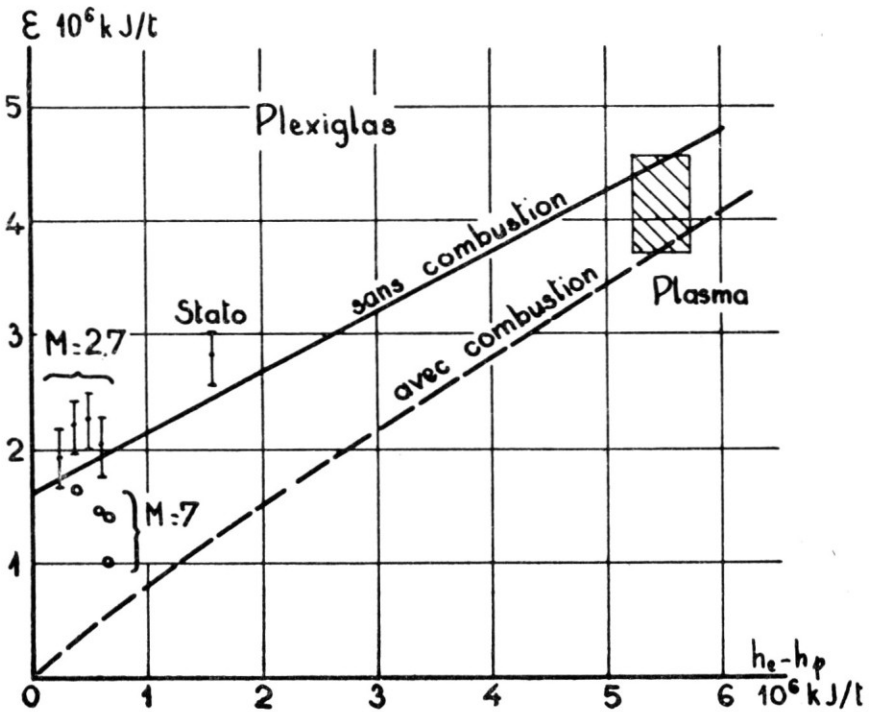


FIG. 12.

sur la formule (9). La Fig. 12 permet de comparer avec les valeurs théoriques les valeurs obtenues expérimentalement; les points obtenus der-

rière statoréacteur, en jet de plasma et en soufflerie de Mach 2,7 s'alignant assez correctement sur la courbe théorique; au contraire, les résultats d'essais effectués en soufflerie de Mach 7 s'en séparent nettement, une explication plausible de cette divergence se trouvant dans l'atmosphère nettement plus oxydante, due au mode de chauffage de cette installation et qui favorise la combustion superficielle du matériau.

6. CONCLUSION

La détermination de la protection, par ablation, d'un engin, suppose avant tout, la donnée au moins schématique de la mission de l'engin; les calculs thermiques effectués montrent en effet que l'efficacité \mathcal{E} du matériau et la quantité de chaleur q_c liée à l'épaisseur thermique et emmagasinée par le revêtement ne constituent plus des paramètres de discussion suffisants pour permettre le choix des matériaux; ce choix demande dans chaque cas, une analyse plus développée du problème thermique, comme l'ont fait par exemple Wood et Tagliani⁽¹³⁾.

D'autre part, la nature du matériau ayant ainsi fait l'objet d'une première sélection, la détermination de l'épaisseur du revêtement et la prévision de son comportement pendant la mission, imposent de prendre en compte, dans les équations aérodynamiques, les variations effectives de toutes les grandeurs physiques: la complication qui en résulte peut devenir très importante et c'est pourquoi, le développement de méthodes de calcul approchées mais rapides est très utile, en permettant une exploration des effets dus à ces différents paramètres.

ANNEXE I*

SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES DE L'EQUATION REDUITE

L'intégration formelle de l'équation:

$$\zeta'' + Zf\zeta' = 0$$

donne, compte tenu des conditions aux limites (1)

$$\log \zeta'_0 = - \log \int_0^{\infty} \exp(-Z\phi) d\eta, \quad \left(\phi = \int_0^{\eta} d\eta \right) \quad (I, 1)$$

d'où la dérivée par rapport à Z:

$$\frac{\partial}{\partial Z} \log \zeta'_0 = - \frac{\int_0^{\infty} \exp(-Z\phi) \phi d\eta}{\int_0^{\infty} \exp(-Z\phi) d\eta} \quad (I, 2)$$

dont on étudie le comportement asymptotique.

* Les démonstrations présentées en annexes ont été élaborées avec la participation de P. J. Michard, Calculateur à l'O.N.E.R.A.

Premier cas: $f_0 > 0$

On suppose dans ce cas que l'intégrale $\phi(\eta)$ peut être exprimée par un développement $\varepsilon(\eta)$ limité, sous la forme:

$$\phi(\eta) = \eta f_0 [1 + \varepsilon(\eta)] \tag{I, 3}$$

On peut écrire dans ces conditions:

$$\frac{\partial}{\partial Z} \log \zeta'_0 = - \frac{\int_0^{\eta_1} \exp \{-Z f_0 (1 + \varepsilon) \eta\} f_0 (1 + \varepsilon) \eta \, d\eta + \int_{\eta_1}^{\infty} \exp(-Z \phi) \phi \, d\eta}{\int_0^{\eta_1} \exp \{-Z f_0 (1 + \varepsilon) \eta\} \, d\eta + \int_{\eta_1}^{\infty} \exp(-Z \phi) \, d\eta}$$

et il est aisé de montrer que les expressions $Z^2 \int_{\eta_1}^{\infty}$ tendent vers 0; le changement de variable $u = Z f_0 \eta$ donne alors, à la limite:

$$\frac{\partial}{\partial Z} \log \zeta'_0 = \left[-\frac{1}{Z} \int_0^{\infty} \exp(-u) u \, du \right] / \left[\int_0^{\infty} \exp(-u) \, du \right] = -\frac{1}{Z}$$

et le calcul de la limite du rapport $\left(\frac{\zeta'_0(Z)}{Z} \right)$ montre immédiatement que ζ'_0 tend vers $f_0 Z$.

Deuxième cas: $f_0 = 0$

La dérivée $f'(0)$ étant également nulle, on est conduit à poser dans ce cas:

$$\phi(\eta) = \frac{1}{6} f''(0) \eta^3 [1 + \varepsilon(\eta)] \tag{I, 4}$$

et on obtient comme précédemment:

$$\frac{\partial}{\partial Z} \log \zeta'_0 = -\frac{1}{Z} \left[\int_0^{\infty} \exp(-u^3) u^3 \, du \right] / \left[\int_0^{\infty} \exp(-u^3) \, du \right] = -\frac{1}{3Z}$$

la limite de $\frac{\zeta'_0(Z)}{Z^{1/3}}$ étant cette fois: $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \sqrt[3]{\frac{f''_0}{6}}$

Troisième cas: $f_0 < 0$

Le calcul est ici assez différent car f s'annule nécessairement pour une valeur $\eta = \check{\eta}$; et ϕ s'annule également pour $\eta = \eta_1$; par suite, pour $\eta < \eta_1$, $\exp(-Z\phi)$ tend vers l'infini avec Z .

Si $\check{\phi}$ désigne le minimum $\phi(\check{\eta})$ de la fonction ϕ , on peut poser :

$$\phi = \check{\phi} + \frac{1}{2} f'(\check{\eta}) (\eta - \check{\eta})^2 [1 + \varepsilon(\eta - \check{\eta})] \tag{I, 5}$$

et effectuer au voisinage de $\check{\eta}$ une décomposition du domaine d'intégration analogue aux précédents.

Les limites obtenues sont alors :

pour

$$\frac{\partial}{\partial Z} \log \zeta'_0 : -\check{\phi} - \frac{1}{2Z}$$

et pour

$$\frac{\zeta'_0}{\sqrt{Z} \exp(z\check{\phi})} : \sqrt{\frac{f'(\check{\eta})}{2\pi}}$$

ANNEXE II

INTERPRÉTATION ANALYTIQUE DES CONDITIONS INTEGRALES

Soit $\check{C}(y_1, y', \dots, y^{(p)}; x) = 0$ une équation différentielle dont on recherche des solutions vérifiant sur le segment (0,1) p conditions entre x, y et ses p premières dérivées supposées bornées.

Une fonction $F_K(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K; x)$, d'une famille à K paramètres de fonctions définies, continues sur (0,1) en λ et x et vérifiant les conditions aux limites imposées, est dite solution approchée de \check{C} si elle vérifie les K premières conditions intégrales :

$$\begin{aligned} I_0(1) = 0, & \quad \text{avec} \quad I_0(x) = \int_0^x \check{C}(F_K F'_K \dots F^{(p)}, x) dx, \\ I_1(1) = 0, & \quad I_1(x) = \int_0^x I_0(x) dx \\ \dots\dots\dots & \quad \dots\dots\dots \\ I_K(1) = 0, & \quad I_K(x) = \int_0^x I_{K-1}(x) dx. \end{aligned} \tag{1}$$

L'intégration par parties d'un I_n quelque donne immédiatement :

$$\begin{aligned} I_n(1) = I_{n-1}(1) - \frac{1}{2l} I_{n-2}(1) + \dots + \frac{(-1)^{r-1}}{r!} I_{n-r}(1) + \dots + \\ + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n \check{C}(F_K \dots x) dx \end{aligned}$$

ce qui montre que les K conditions (1) sont équivalentes aux K premières conditions de la forme:

$$\int_0^1 x^n \mathcal{C}(F_K F'_K \dots F_K^{(p)}; x) dx = 0$$

ou encore, si $P_n(x)$ désigne le polynôme d'ordre n de Legendre, aux K conditions:

$$\int_0^1 P_n(x) \mathcal{C}(F_K F'_K \dots F_K^{(p)}; x) dx = 0 \quad (3)$$

Par suite, le système des P_n étant orthogonal et complet sur $(0,1)$, si le nombre K de conditions tend vers l'infini, $\mathcal{C}(F_K F'_K \dots F_K^{(p)}; x)$ sera nul presque partout sur $(0,1)$ et F solution presque partout de $\mathcal{C} = 0$ sur $(0,1)$.

SYMBOLES (LISTE)

a	Rapport caractéristique entre le puits de chaleur et le revêtement fongible;
A, B	constantes;
C	chaleur spécifique;
c_i	concentration du constituant i du mélange gazeux dans la couche limite;
C_p	chaleur spécifique à pression constante;
D	coefficient de diffusion;
e	épaisseur de matériaux solides;
$E(y, y', \dots, x)$	équation différentielle;
\mathcal{C}	efficacité;
f	fonction de (ξ, η) liée à la vitesse: $f'_\eta = u/u_e$;
F	famille de fonctions;
g	fonction de (ξ, η) liée à l'enthalpie: $g = \left(h + \frac{u^2}{2}\right) \Big \left(h + \frac{u^2}{2}\right)_e$;
h	enthalpie;
j	exposant égal à 0 ou 1;
k, K	constantes;
Le	nombre de Lewis ($Le = \rho DC_p / \lambda$)
L_v	chaleur de vaporisation;
\dot{m}	débit d'un gaz émis par la paroi fongible;
\mathfrak{M}	masses moléculaires;
p	pression;
Pr	nombre de Prandtl ($Pr = \mu c_p / \lambda$);

q	flux de chaleur;
Q	énergie d'activation;
r	distance à l'axe sur un obstacle de révolution;
Sc	nombre de Schmidt ($Sc = \mu/\rho D = Pr/Le$);
t	temps;
T	température;
u, v	composantes de la vitesse selon (x, y) ;
u_i, v_i	vitesse de diffusion du gaz i ;
w_i	taux de production d'un constituant: dans la couche limite;
x, y	coordonnées géométriques;
Y	dans la paroi, distance à la surface d'ablation;
z	nombre de Prandtl ou nombre de Schmidt.
β	Paramètre supposé constant, caractérisant le gradient de vitesse à la frontière de la couche limite $\left(\beta = \frac{2d \log u_e}{d \log \xi}\right)$;
$\gamma(a)$	fonction du paramètre a ;
ε	fraction de l'épaisseur initiale d'un revêtement, subsistant après une ablation de durée t ;
ζ	fonctions réduites: $(g-g_p)/(1-g_p)$ ou $(c_i-c_{ip})/(c_{ie}-c_{ip})$;
η	coordonnée géométrique transformée;
θ	rapport de températures;
λ	conductibilité thermique;
$\lambda_1 \dots \lambda_k$	paramètres déterminés par conditions intégrales;
μ	viscosité;
ξ	coordonnée géométrique transformée;
ρ	densité;
ϕ	primitive en η de f ;
χ	diffusivité ($\chi = \lambda/c\rho$);
ψ	fonction auxiliaire de η ;

INDICES INFÉRIEURS

0	Point d'arrêt;
1	gaz du courant principal;
e	frontière de la couche limite;
E	gaz émis par la paroi fongible;
i	constituant du mélange gazeux dans la couche limite;
K	point intérieur de la couche limite;
M	matériel fongible;
p	paroi;
η, ξ	dérivations par rapport à ξ ou η ;
$\bar{\omega}$	température du puits de chaleur.

INDICES SUPERIEURS

'	paramètres relatifs au puits de chaleur;
' , ''	dérivations par rapport à η (sans possibilité de confusion);
v	minimum d'une fonction;
*	valeurs au point intermédiaire;
—	valeur calculée sans ablation.

BIBLIOGRAPHIE

1. LEES, L., Laminar heat transfer over blunt-bodies at hypersonic flight speeds *Jet Propulsion* — Vol. 26, No. 4, 1956, pp. 259–270.
2. FAY, J. A. and RIDDEL, F. R., Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air. *J. Aero. Sci.* Vol. 25, No. 2, 1958, pp. 73–85
3. MICKLEY, H. S. and ROSS, R. C., Heat, mass, and momentum transfer for flow over a flat plate with blowing or suction—N.A.C.A., TN 3208, 1954.
4. ROBERTS, L., An analysis of ablation-shield requirement for manned reentry vehicles, N.A.S.A., T.R. R-62, 1960.
5. LEES, L., Convective heat transfer with mass addition and chemical reactions. Third AGARD combustion colloquium, pp. 451–498, Pergamon Press, London 1958.
6. MACADAMS, C., Recent advances in ablation. *A.R.S. Journal*, 9, 1960, pp. 625–632
7. MONAGHAN, R. J., On the behaviour of boundary layers at supersonic speeds. I.A.S. Preprint No. 557, June 1955.
8. ROMIG, M. F., Stagnation point heat transfer for hypersonic flow. *Jet Propulsion*, Vol. 26, No. 12, 1956, pp. 1098–1100.
9. SCHLICHTING, H., Die Grenzschicht an der ebenen Platte mit Absaugung und Ausblasen *Luftfahrt — Forschung*, Vol. 19, No. 9, 20–10, 1942, pp. 293–301.
10. GROSS, J. F., MASSON, D. J. and GAZLEY, C., General characteristics of binary boundary layers with applications to sublimation cooling. RAND Corporation, P. 1371, 1958.
11. CARSLAW, H. S. and JEAAGER, J. C., Conduction of heat in solids. Clarendon Press, Oxford 1959.
12. GOODMAN, Th. R. and SHEA, J. J., The melting of finite slabs. *J. Appl. mechanics* Vol. 27, ser. E, No. 1, 1960, pp. 16–24.
13. WOOD, R. M. and TAGLIANI, R. J., Heat protection by ablation. I.A.S. Paper No. 60–8, Jan. 1960.